

研究主題：誰也佔不了便宜~骰子與骰子遊戲之探討及創作

研究者：連向澄

指導教師：彭瓊慧老師

## 壹、研究動機：

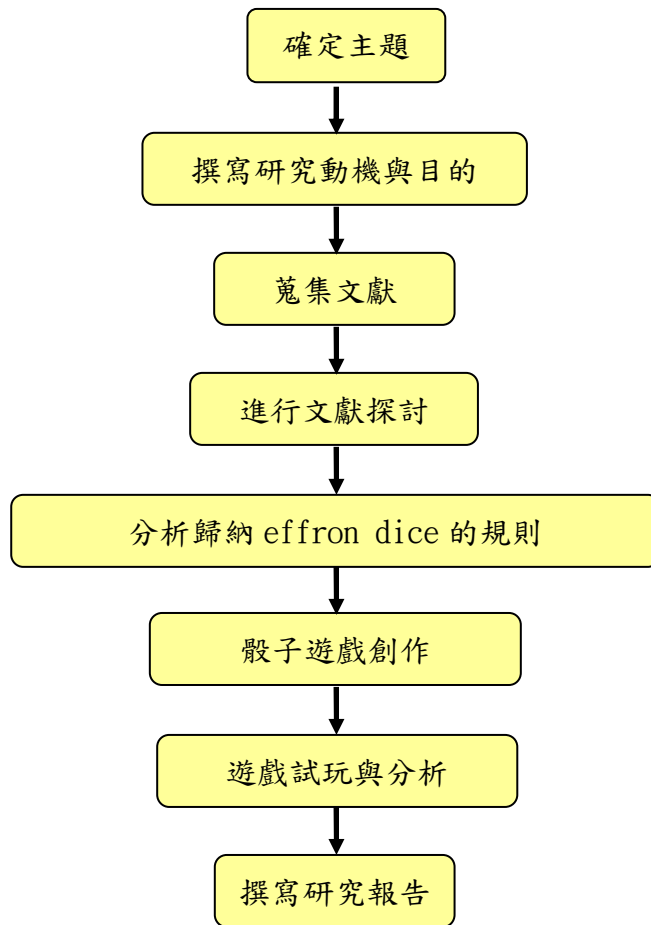
在一次偶然的機會下，我閱讀到一篇叫「骰子漫談」的文章，除了介紹骰子的歷史及用途外，還介紹了一些特殊的骰子，非常有趣，其中讓我最著迷的莫過於 sicherman dice 和 Efron Dice 了，sicherman dice 與一般骰子一樣有相同的機率，而 Efron Dice 則是特別的無遞移性骰子。讓我好奇的是，這些骰子公平性如何？是否有其特殊的原理及規則？市面上常見的一些有關骰子的遊戲(如賭場遊戲、益智遊戲)等，是否也運用這些原則投機取巧，保證了莊家較大的贏面，因此，我想趁此研究探究一番，並以特殊的骰子設計出有趣好玩的益智遊戲。

## 貳、研究目的：

- 一、了解特殊骰子的種類及特性
- 二、介紹不同點數的 Efron Dice，嘗試歸納特性及規則
- 三、利用 Efron Dice 的原理創作有趣的骰子益智遊戲，並分析致勝秘笈及機率。

## 參、研究方法：創作、內容分析

## 肆、研究過程：



## 伍、文獻探討

### 一、骰子的起源與歷史

骰子的歷史與人類歷史一樣的久，常以不同形式出現在賭博中，古埃及與蘇美人的墓中也都發現過手工製骰子遊戲，而在古希臘時期末與羅馬時代，擲骰子也是一種流行的遊戲。

古希臘詩人認為骰子是在 3000 年前在特洛伊城發明的，但 Herodotus 認為是里底亞人發明的，其實骰子的形成比特洛伊與里底亞還要早。

羅馬曾發現一個約西元前 900 年製的伊特魯里亞骰子，與現今常見骰子相似，對稱面的點數和為 7。英國的史前建築眉登古堡也有相似的骰子。

玩法和今日沒有差別，將骰子置於杯中搖動擲出，讀出點數。希臘人使用三個骰子，羅馬人只用兩個。

考古學家也證實在古埃及，不論農人貴族，都愛玩骰子遊戲。宗教記載甚至說骰子是死後靈魂所玩的遊戲。

當時的骰子是用骨頭或象牙甚至青銅、瑪瑙、黑玉、石膏、大理石、水晶、琥珀、瓷器等材質製成。世界各地的原始部落也都有不同種類的骰子用來賭博，骰子的形狀及上面的符號都非常奇怪，例：印地安、阿茲特克與馬雅，南半球的海島部落、愛斯基摩、非洲部落……都有自己獨特的骰子，而材料也千奇百怪，有水果的果核、鵝卵石、種子、骨頭、鹿角、陶器、胡桃殼、海狸牙齒或貝殼等等。

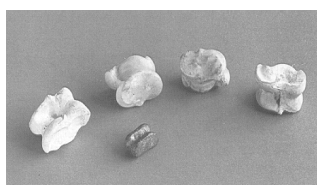


這是夏安族的骰子，使用 5 個果核作為單面骰子，3 個畫上十字，2 個畫上熊掌的圖案

1. 出現 2 空白、2 十字與 1 熊掌為 0 分
2. 出現 1 空白、2 十字與 2 熊掌得 1 分…
3. 丟出 3 十字與 2 熊掌便獲勝



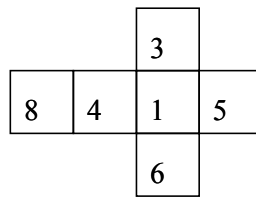
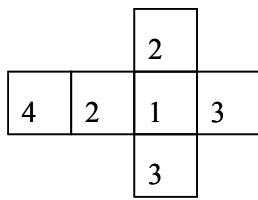
這對骰子是在羅馬 Herculaneum 城被發現的。當地人稱它為 Tesseræ。



這是一種只有四個面的骰子，源自古希臘，他們稱它為 Tali，是以距骨或山羊、綿羊的蹠骨所製成的。上面刻著 1、3、4 及 6，在古希臘雕像中，也有雕刻兩個女人在玩丟骰子遊戲。

## 二、特殊的骰子-sicherman dice

通常我們所熟悉的骰子都是六面體，上面有 1 至 6 的點數，每個點數出現的機率都是  $\frac{1}{6}$ ，又稱為公平骰子。然而由數學家 Col. George Sicherman 所發明的特殊骰子：sicherman dice 上的點數非常奇怪，不一定是一到六。儘管數字不同於一般的公平骰子，但兩個 sicherman dice 點數和兩個公平骰子的點數總和的機率卻一樣！，這也是 sicherman dice 最神奇的地方。例如兩個 sicherman dice 點數是這樣：



它所拋擲出的的總和就會和公平骰子一樣。

我們可以來試驗，這是一般公平骰子點數總和：

|  |   |   |   |    |    |    |
|--|---|---|---|----|----|----|
|  |   |   |   |    |    |    |
|  | 2 | 3 | 4 | 5  | 6  | 7  |
|  | 3 | 4 | 5 | 6  | 7  | 8  |
|  | 4 | 5 | 6 | 7  | 8  | 9  |
|  | 5 | 6 | 7 | 8  | 9  | 10 |
|  | 6 | 7 | 8 | 9  | 10 | 11 |
|  | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

|    |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| 總和 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 次數 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 5 | 4 | 3  | 2  | 1  |

這是 sicherman dice 點數和：

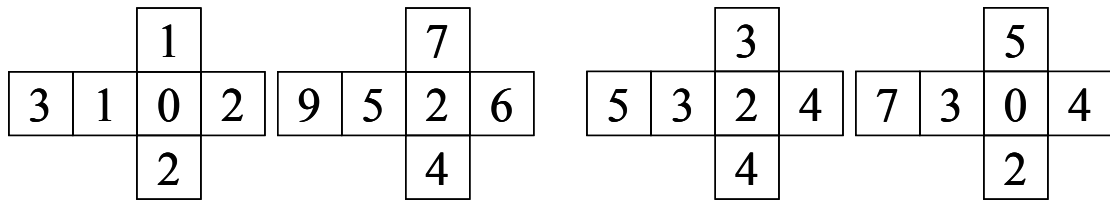
|  |   |    |    |    |    |    |
|--|---|----|----|----|----|----|
|  |   |    |    |    |    |    |
|  | 2 | 3  | 3  | 4  | 4  | 5  |
|  | 4 | 5  | 5  | 6  | 6  | 7  |
|  | 5 | 6  | 6  | 7  | 7  | 8  |
|  | 6 | 7  | 7  | 8  | 8  | 9  |
|  | 7 | 8  | 8  | 9  | 9  | 10 |
|  | 9 | 10 | 10 | 11 | 11 | 12 |

|    |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| 總和 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 次數 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 5 | 4 | 3  | 2  | 1  |

由上可知，sicherman dice 點數總和和公平骰子點數總和一樣！

在每一面的數字均為正數的情況下，上頁中的兩個骰子是唯一的一種

「Sicherman 骰子」排列組合。因此，如果數字可以是負數或零，我們可以把各面點數加一或者減一，並製造出第二個 Sicherman dice，以此類推.....，如下列幾種不同數字的形式：



Col. George Sicherman 更指出：

1. 如果不用 Sicherman dice，不可能找到另一組大於或等於三顆的 Sicherman dice，上面的點數出現機率與公平骰子相同。

如果用一顆公平骰子和一組 Sicherman dice，而這三顆骰子所拋擲出點數機率會與三顆公平骰子相同。

2. 如用二組 Sicherman dice 會與四顆公平骰子相同。

但在新竹市建功高級中學學生陳皓嫻的科展研究裡，卻推翻了 Sicherman 的理論。她發現“不使用 Sicherman Dice 找不到一組大於等於 3 顆的 Sicherman 骰子，它們拋擲出點數和機率與同數量正常骰子相同。”此理論只適用於 4 面及 6 面體骰子。但 8 面、12 面及 20 面體骰子的情形則不適用。

### 三、特殊的骰子：無遞移性骰子

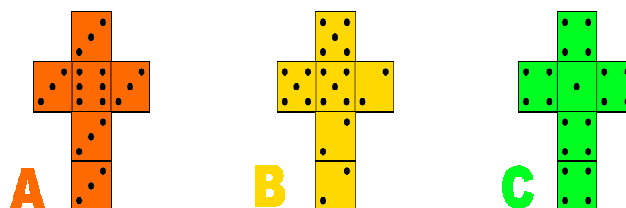
何謂無遞移性？一般來說，數學上大多數的原理都是有遞移性的，例如：舉一個式子，100 比 10 大，10 又比 1 大，但 1 不可能比 100 大。而無遞移性正好相反，也就是：A 大於 B 大於 C，但 C 又大於 A。生活上也有許多例子，像是：剪刀石頭布，石頭贏剪刀，剪刀又贏布，布又贏石頭。如圖：在骰子當中，也有一組 3 個或四個骰子的組合，他們的贏率分別是 A 大於 B，B 大於 C，C 大於 D，D 又大於 A，此組骰子稱為無遞移性骰子。以下分別介紹這些神奇的組合。



#### (一) 三顆不尋常的骰子

這是個由三個玩家玩的遊戲，每個人可以選擇這組奇異的骰子中的一個，這些骰子的點數不是 1 至 6，而是各種不同點數。當玩家選擇玩骰子後，便一起擲骰子來比大小，擲第一次時每個人贏的機率還不是很公平，但擲到第十次時每個

人勝率幾乎一樣，為什麼呢？這三顆骰子如下：每個骰子有六個面，但僅有兩個值，如下：

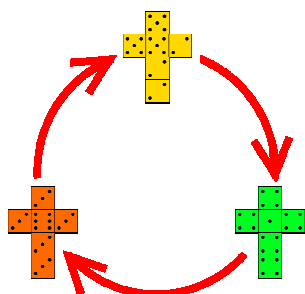


甲：3 3 3 3 3 6

乙：2 2 2 5 5 5

丙：1 4 4 4 4 4

如下圖可以看出甲贏乙，乙贏丙，丙又贏甲！



一般骰子應該不會發生這種情況，但像這種無遞移性骰子就會像剪刀石頭布一樣，誰也佔不到便宜。

這是三顆骰子的勝率，再看圖中可以看出骰子乙擲出 2 的機率是  $1/2$ ，5 是  $1/2$ 。骰子甲擲出三的機率是  $5/6$ ，擲出六的機率是  $1/6$ 。則骰子甲與骰子乙的勝負機率是：

1. 骰子甲(3)：骰子乙(5)，甲輸，機率： $5/6 * 1/2 = 5/12$
2. 骰子甲(3)：骰子乙(2)，乙輸，機率： $5/6 * 1/2 = 5/12$
3. 骰子甲(6)：骰子乙(5)，乙輸，機率： $1/6 * 1/2 = 1/12$
4. 骰子甲(6)：骰子乙(2)，乙輸，機率： $1/6 * 1/2 = 1/12$

所以骰子甲以  $7/12$  的勝率贏骰子乙。

骰子乙與骰子丙的勝負機率是：

1. 骰子乙(5)：骰子丙(1)，丙輸，機率： $1/2 * 1/6 = 1/12$
2. 骰子乙(5)：骰子丙(4)，丙輸，機率： $1/2 * 5/6 = 5/12$

3. 骰子乙(2):骰子丙(1)，丙輸，機率： $1/2 * 1/6 = 1/12$

4. 骰子乙(2):骰子丙(4)，乙輸，機率： $1/2 * 5/6 = 5/12$

骰子乙也以  $7/12$  的勝率贏骰子丙。

骰子丙與骰子甲的勝負機率是：

1. 骰子丙(1):骰子甲(3)，丙輸，機率： $1/6 * 5/6 = 5/36$

2. 骰子丙(1):骰子甲(6)，丙輸，機率： $1/6 * 1/6 = 1/36$

3. 骰子丙(4):骰子甲(3)，甲輸，機率： $5/6 * 5/6 = 25/36$

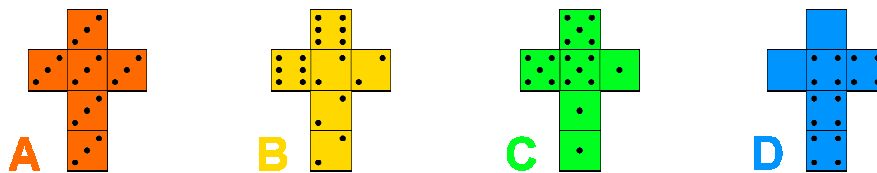
4. 骰子丙(4):骰子甲(6)，丙輸，機率： $5/6 * 1/6 = 5/36$

骰子丙以  $25/36$  的勝率贏骰子甲。

綜合上述結果可發現，儘管兩者之間的勝率不同，卻有著甲>乙，乙>丙，丙>甲的無遞移性關係。

## (二) Efron Dice

這是在 70 年代興起的特殊骰子，有點像上一節的不尋常骰子，是由美國數學家 Brad Efron 發明的，是由四個點數為 1-6 的特殊骰子為一組，如下：



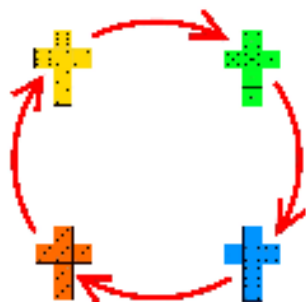
骰子甲：3 3 3 3 3 3

骰子乙：2 2 2 2 6 6

骰子丙：1 1 1 5 5 5

骰子丁：0 0 4 4 4 4

和三顆不尋常的骰子一樣，這四個骰子一樣成一個圓圈，互相獲勝，如下：



骰子甲與骰子乙的勝負機率是：

1. 骰子甲(3):骰子乙(2)，乙輸，機率： $1*2/3=2/3$
2. 骰子甲(3):骰子乙(6)，甲輸，機率： $1*1/3=1/3$

所以骰子甲以  $3/2$  的勝率贏骰子乙，贏率為  $2/3$

骰子乙與骰子丙的勝負機率是：

1. 骰子乙(2):骰子丙(1)，丙輸，機率： $2/3*1/2=1/3$
2. 骰子乙(2):骰子丙(5)，乙輸，機率： $2/3*1/2=1/3$
3. 骰子乙(6):骰子丙(1)，丙輸，機率： $1/3*1/2=1/6$
4. 骰子乙(6):骰子丙(5)，丙輸，機率： $1/3*1/2=1/6$

骰子乙也以  $2/3$  的勝率贏骰子丙，贏率為  $2/3$

骰子丙與骰子丁的勝負機率是：

1. 骰子丙(1):骰子丁(0)，丁輸，機率： $1/2*1/3=1/6$
2. 骰子丙(1):骰子丁(4)，丙輸，機率： $1/2*2/3=1/3$
3. 骰子丙(5):骰子丁(0)，丁輸，機率： $1/2*1/3=1/6$
4. 骰子丙(5):骰子丁(4)，丁輸，機率： $1/2*2/3=1/3$

骰子丙以  $2/3$  的勝率贏骰子丁，贏率為  $2/3$

骰子丁與骰子甲的勝負機率是：

1. 骰子丁(0):骰子甲(3)，丁輸，機率： $1/3*1=1/3$
2. 骰子丁(4):骰子甲(3)，甲輸，機率： $2/3*1=2/3$

骰子丁以  $3/2$  的勝率贏骰子甲。

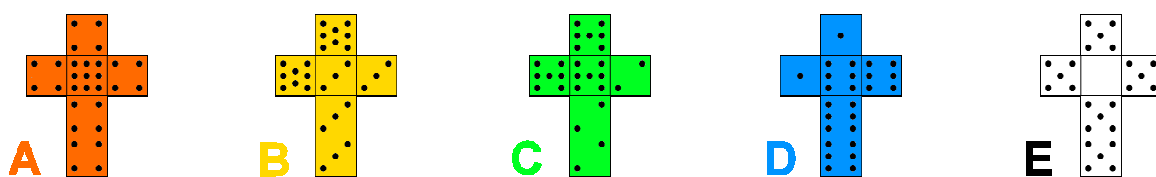
Efron Dice 不只上面的特點，骰子乙也贏骰子丁，骰子甲與骰子丙的勝負機率也是五五波。

雖然 Efron Dice 和上一段所介紹的「三個不尋常骰子」大致相同，但最重要的一點是：**Efron Dice 中 A 與 C，B 與 D 並未存在關係。**

### (三)Grime Dice



下面是另一種的五個骰子組成的無遞移性骰子：



這些骰子的點數是由 1 至 9 組成，分別如下：

骰子 A：4 4 4 4 4 9

骰子 B：3 3 3 3 8 8

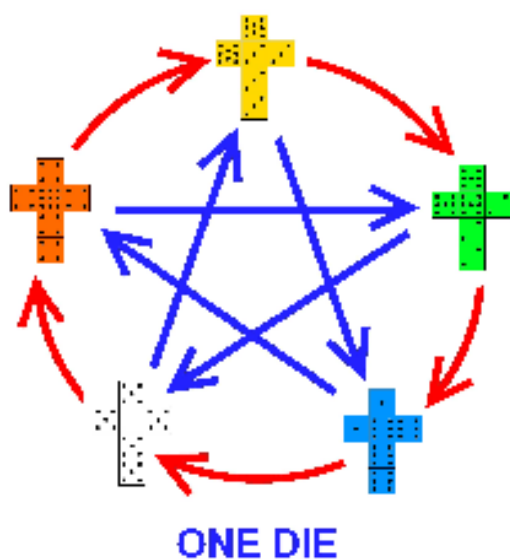
骰子 C：2 2 2 7 7 7

骰子 D：1 1 6 6 6 6

骰子 E：0 5 5 5 5 5

和其他的無遞移性骰子一樣，可以看出  $A > B > C > D > E > A$  勝率都是 64.7%。

但如果仔細觀察，就會發現有另一個循環鏈： $A > C > E > B > D > A$ ，每個骰子的勝率都是 59.2%，就像剪刀，石頭，布，蜥蜴，斯波克(星際迷航中的副艦長)，下圖：



甲 > 乙 > 丙 > 丁 > 戊 > 甲 = 剪刀減布，布包石頭，石頭壓死蜥蜴，蜥蜴咬傷斯波克，斯波克用壞剪刀。

甲 > 丁 > 乙 > 戊 > 丙 > 甲 = 剪刀斬蜥蜴，蜥蜴吃布，布駁斥斯波克，斯波克消滅石頭，石頭弄碎剪刀。

如果綜合以上兩種的循環鏈，那每個骰子的勝率大約是 61.9%，而且如果擲骰子次數小於 20 次，那每個骰子的勝率幾乎是 50%。所以不管你選哪一種骰子，你都有一定的機會擊敗對手。

### 三、骰子遊戲與機率

#### (一) 骰子與賭場遊戲的關係

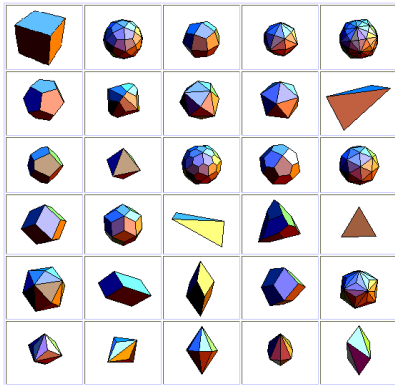
骰子是一種極為古老的遊戲器具，因此，在流行的賭場裡，骰子已經沒有吸引力，只能當做決定先後順序的器具。但骰子仍然在賭場有一席之地，像是比大小、Bird Cage、Big Six、Klondike、Poker dice 等比大小類的遊戲。甚至簡單到 PIG、押寶等超簡易遊戲都有，有些撲克牌遊戲也是由骰子遊戲來做基礎。

賭場遊戲大概分為四大種：

1. 撲克牌 Poker：又分二十一點類 Blackjack(二十一點，十點半……等等) 牌戲類 Poker(橋牌、梭哈、德州撲克、拱豬，接龍……等等)。
2. 角子機 Slots：吃角子老虎以及其與其他三類綜合的角子遊戲。
3. 輪盤賭 Roulette：賭場必備，輪盤賭!!
4. 其他：包括彩券 Keno 以及骰子遊戲(Bird Cage、Big Six、Klondike)。(參自 <http://www.casinogameslots.com/>)

## 陸、骰子遊戲創作及分析

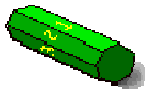
除了上述的骰子外，還有許多的特殊骰子，如非六面體的公平骰子，如圖：



此為柏拉圖正多面體和阿基米得多面體逆做

成的骰子，多半是平常使用的骰子。

較特殊的有(非等面多面體的骰子)：



1. 以正多邊形為兩底面的柱體，也就是考試猜題的鉛筆。

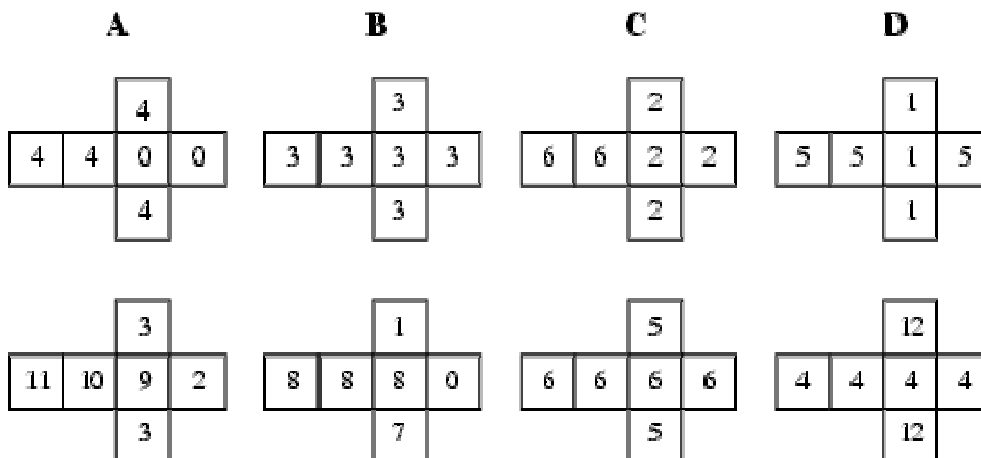


2. 另一種是旋轉陀螺，旋轉後朝地的那面就是擲出點數。

但我最有興趣的還是無遮移性骰子，因此，我決定以 Efron Dice 為媒介，設計一些骰子遊戲，藉此探討 Efron Dice 各種可能性。

## 一、各種 Efron Dice

除了上述的例子外，下面這幾組骰子之間也都有“無遞移性”存在，各組的贏率並不相同。例如下列四個骰子A>B，B>C，C>D，D>A的贏率都是2:1。



1. 贏率=5 : 4

A: 3, 3, 5, 5, 7, 7

B: 2, 2, 4, 4, 9, 9

C: 1, 1, 6, 6, 8, 8

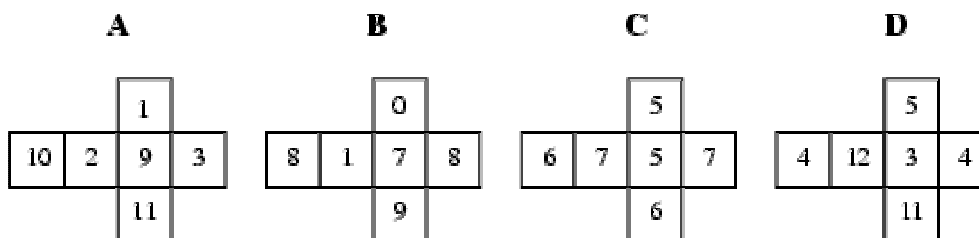
2. 贏率=7 : 5

A: 1, 1, 1, 13, 13, 13

B: 0, 3, 3, 12, 12, 12

C: 2, 2, 2, 11, 11, 14

3. 贏率=11:6



4. 也有兩個骰子之間的贏率不同，但關係相同的，例如：

A: 1, 4, 4, 4, 4, 4

B: 3, 3, 3, 3, 3, 6

C: 2, 2, 2, 5, 5, 5

令 P 為機率，P(A) 表示骰子 A 的機率，P(A)>P(B) 代表骰子 A 對骰子 B 的贏率

(1) A:B

以骰子 A 而言，

$$P(A>B)=5/6*5/6=25/36$$

以骰子 B 而言，

$$P(B>A)=5/6*1/6+1/6*1=11/36$$

因此A:B=25:11

(2)B:C

以骰子 B 而言，

$$P(B>C)=5/6*1/2+1/6*1=7/12$$

以骰子 C 而言，

$$P(C>B)=1/2*5/6=5/12$$

因此B:C=7:5

(3)C:A

以骰子 C 而言，

$$P(C>A)=1/2*1/6+1/2*1=7/12$$

以骰子 A 而言，

$$P(A>C)=5/6*1/2=5/12$$

因此C:A=7:5